ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №6
ФУНКЦИИ ОДНОЙ И МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ. ФУНКЦИЯ КОББА-ДУГЛАСА

Примеры

1. $f(x) = \lg x$ - функция одной переменной x, заданная на множестве $\mathsf{M} = \{x : x \in R^1, \ \ x > 0\}$. В частности $f(10) = \lg 10 = 1$.

2. $f(X) = \dfrac{1 - x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}$ - функция двух переменных x_1, x_2, заданная на множестве $\mathsf{M} = R^2 \setminus \{O(0{,}0)\}$. В частности, в точке $A(1;-1)$) имеем $f(A) = \dfrac{1 - 1\cdot(-1)}{1^2 + (-1)^2} = 1$.

3. $f(X) = \sqrt{4 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}$ - функция трех переменных $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$, заданная на множестве $\mathsf{M} = \{X : X \in R^3, \ \ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \le 4\}$. В частности, в точке $A(1;1;1)$ имеем $f(A) = \sqrt{4 - 1^2 - 1^2 - 1^2} = 1$.

Упражнения

1. Найти значение функции $y = \dfrac{x_1^4 + 2x_1^2 x_2^2 + x_2^4}{1 - x_1^2 - x_2^2}$ в точках окружности $x_1^2 + x_2^2 = R^2$.

2. Найти $f(x_1, \ \ x_2)$, если $f(x_1 + x_2, \ \ x_1 - x_2) = x_1 x_2 + x_2^2$.

Примеры

1. $f(x) = \sqrt{x - 1}$ - функция одной переменной x;

$$D(f) = [1, +\infty) \subset R^1; \quad E(f) = [0, +\infty) \subset R^1.$$

2. $f(X) = \dfrac{1}{x_1^2 + x_2^2}$ - функция двух переменных;

$$D(f) = R^2 \setminus \{O(0{,}0)\} \subset R^2; \quad E(f) = (0, +\infty) \subset R^1.$$

3. $f(X) = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}$ - функция трех переменных;

$$D(f) = \{X : X \in R^3, \ \ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \le 1\} \subset R^3; \quad E(f) = [0,1] \subset R^1.$$

Упражнения

Найти области определения заданных функций.

1. $y = \sqrt{\dfrac{x - 3}{1 - 3x + 2x^2}}$.

2. $y = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$.

3. $y = \sqrt{x_2 \sin x_1}$.

4. $\boldsymbol{y} = 1 + \sqrt{-(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2)^2}$.

5. $y = \ln(x_1^2 + x_2)$.

6. $y = \ln(x_1 + x_2)$.

7. $y = arctg\dfrac{x_1 - x_2}{1 + x_1^2 x_2^2}$.

8. $y = x_1 + \arccos x_2$.

9. $y = \dfrac{1}{x_1^2 + x_2^2}$.

10. $y = \sqrt{1 - x_1^2} + \sqrt{1 - x_2^2}$.

11. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x_2 - \sqrt{x_1}}}$.

12. $y = \arcsin\dfrac{x_2}{x_1}$.

Пример. Если $f(x) = \sqrt{x^2}$, $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^1$ и $g(x) = |x|$, $x \in R^1$, то $f = g$, так как при всех $x \in R^1$ справедливо равенство $\sqrt{x^2} = |x|$

Если $M' \subset D(f)$, то функцию $g(X) = f(X)$, $X \in M'$ **называют сужением функции** f на множество M'.

Пример. Если $M' = [0, +\infty)$, то функция $g(x) = x$, $x \in M'$ является сужением функции $f(x) = |x|$, $x \in R^1$ на множество M'.

Если равенство $g(X) = f(X)$ верно при всех $X \in M'$, где $M' \subset D(f) \cap D(g)$, т, е. сужения функций f и g на множество M' совпадают, то в этом случае говорят, что функции f и g равны на множестве M'. Например, функции $\sqrt{x^2}$ и $\boldsymbol{x}$ равны на множестве $M' = [0, +\infty)$.

Упражнения

Найти области определения функций f, g, $f + g$.

1. $f(x) = \sqrt[4]{3 - x}$, $g(x) = \sqrt{x + 1}$.

2. $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $g(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x}{2x - 1}}$.

3. $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{x - 3}$, $g(x) = \lg(x^2 - 4)$.

4. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{5x - x^2}}$, $g(x) = tgx$.

5. $f(x) = \lg(16 - x^2)$, $g(x) = \dfrac{1}{1 - \sin x}$.

6. $f(x) = x + \sqrt{x - 1}$, $g(x) = x - \sqrt{x - 1}$.

Пример. Функция $f(x) = \sin x$ ограничена во всей области определения $D(f) = (-\infty, +\infty)$, так как множество ее значений $E(f) = [-1, 1]$ - множество ограниченное $(-1 \le \sin x \le 1)$.

Пример. Функция $f(X)=\dfrac{1}{x_1^2+x_2^2}$ ограничена лишь снизу во всей области определения $D(f)=R^2\setminus\{(0{,}0)\}$, так как множество ее значений $E(f)$ ограничено только снизу так, что $f(X)>0$. Функция не ограничена сверху в любой окрестности точки $O(0{,}0)$: существует последовательность

$$X_k\left(\frac{1}{k},\ \frac{1}{k}\right),\ k=1,2,....$$

сходящаяся к точке $\boldsymbol{O}(0{,}0)$ и такая, что последовательность значений функции

$$f(X_k)=\frac{1}{\left(\frac{1}{k}\right)^2+\left(\frac{1}{k}\right)^2}=\frac{k^2}{2}$$

стремится к $+\infty$.

Упражнения

1. Показать, что функция $y=\dfrac{1}{x^2}$, $x\in R^1$, $x\neq 0$, неограниченна, и построить ее график.

2. Показать, что функция $y=\dfrac{x^3}{x^4+1}$, $x\in R^1$, ограничена.

3. Показать, что сумма и произведение ограниченных функций – ограниченная функция

Примеры.

1. Следующие пара функций $y=2^u$, $u=\sin x$ задает сложную функцию $y=2^{\sin x}$, определенную на множестве R^1 и имеющую множеством значений отрезок $\left[\frac{1}{2},\ 2\right]$.

2. Аналогично, функция $y=\ln\cos\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ является суперпозицией следующих функций $y=\ln u$, $u=\cos v$, $v=\dfrac{1}{z}$, $z=\sqrt{x}$**.**

Примеры

1. Эллипс

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

задается параметрически в виде $x = a\cos t, \quad y = b\sin t$, где $0 \le t \le 2\pi$.

2. Прямая линия в пространстве имеет параметрическое задание $x = x_0 + mt, \quad y = y_0 + nt, \quad z = z_0 + pt$, где $(x_0, \quad y_0, \quad z_0)$ - точка, через которую проходит прямая; $(m, \quad n, \quad p)$ - вектор, параллельный прямой; $-\infty < t < +\infty$.

Упражнение

Как может быть задана параметрически зависимость $z = x^2 + y^2$ (параболоид вращения) ?

Примеры

1. Функция $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^2$- выпуклая на $\boldsymbol{R}^1$. Действительно, для произвольных $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{R}^1$ и любого $\lambda \in [0,1]$ получим

$$\lambda \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + (1-\lambda)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}) - \boldsymbol{f}(\lambda\boldsymbol{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{z}) = \lambda\boldsymbol{x}^2 + (1-\lambda)\boldsymbol{z}^2 - (\lambda\boldsymbol{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{z})^2 =$$

$$= \lambda(1-\lambda)\boldsymbol{x}^2 - 2\lambda(1-\lambda)\boldsymbol{xz} + \lambda(1-\lambda)\boldsymbol{z}^2 = \lambda(1-\lambda)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z})^2 \ge 0.$$

2. Линейная функция

$$f(X) = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$$

является одновременно и выпуклой, и вогнутой на всем пространстве R^n.

Упражнения

1. Покажите, что квадратичная (форма) функция

$$f(X) = 2x_1^2 + 11x_2^2 + 52x_3^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 - 16x_2x_3,$$

является выпуклой на пространстве R^3?

2. Когда квадратичная (форма) функция

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_ix_k$$

является выпуклой (вогнутой) на $\boldsymbol{R^n}$?

Пример. Функция $\boldsymbol{y} = \cos\boldsymbol{x}$, для которой $D(f) = (-\infty, +\infty)$, является четной функцией, так как $\cos(-\boldsymbol{x}) = \cos\boldsymbol{x}$ для всех $x \in D(f)$.

Упражнение

Четной или нечетной функцией является функция $\boldsymbol{y} = \arcsin\boldsymbol{x}$, для которой $D(f) = [-1,1]$?

Примеры

1. $y = \sin x$ и $y = \cos x$ имеют период $T = 2\pi$.

2. $y = tgx$ и $y = ctgx$ имеют период $T = \pi$**.**

3. Функция Дирихле

$$y = \begin{cases} 1, & если \quad x - рациональное, \\ 0, & если \quad x - иррациональное, \end{cases}$$

имеет периодом любое положительное рациональное число, однако не имеет наименьшего периода.

Примеры

1. $y = \lg x$ - строго возрастающая функция во всей области определения.

2. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ - строго убывающая функция во всей области определения.

3. $y = x^2$ - строго возрастающая в промежутке $\mathsf{M} = [0, +\infty)$ и строго убывающая в промежутке $\mathsf{M} = (-\infty, 0]$.

4. $y = E(x) = [x]$ (целая часть числа $\boldsymbol{x}$) - неубывающая функция.

5. $y = \sin x$**,** строго возрастающая функция на $\mathsf{M} = \left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$.

Упражнения

1. Показать, что функция $f(x) = x^3 + 3x + 5$ возрастает во всей области ее определения.

2. Показать, что функция $f(x) = \frac{x}{1 + x^2}$ убывает в промежутке $(1, \ +\infty)$.

3. Являются ли взаимно обратными функции, следующие заданные функции:

1) $y = \frac{x+1}{x-1}$, $\quad y = \frac{x+1}{x-1}$. $\qquad$ 2) $y = 1 - \sqrt[3]{x}$, $\quad y = (1 - x)^3$.

3) $y = 1 + \sqrt{x}$, $\quad y = (x - 1)^2$. $\qquad$ 4) $y = \sqrt{1 - x^2}$, $\quad y = \sqrt{1 - x^2}$.